

# Méth. Mat. Phys. - Chapitre 6

## Séries de Fourier



- 6.1 Séries de Fourier réelles
- 6.2 Séries de Fourier complexes
- 6.3 Parité des séries de Fourier
- 6.4 Fonctions périodiques
- 6.5 Corde vibrante
- 6.6 Corde pincée

- **Séries de Fourier** : représentation d'une fonction continue par morceaux comme combinaison linéaire de fonctions sinusoïdales orthogonales.

- 1 **Fonction en dents de scie** :  $x \in [-\pi, \pi]$  (1 période) exercice

$$f(x) = x = \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \quad (6.1)$$

- 2 **Fonction en escalier** :  $x \in [-\pi, \pi]$  (1 période) exercice

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq \pi \end{cases} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} \quad (6.2)$$

- **Fonction réelle** : parties symétrique (paire) et antisymétrique (impaire)

$$f(x) = \frac{1}{2} \left( f(x) + f(-x) \right) + \frac{1}{2} \left( f(x) - f(-x) \right) \quad (6.3)$$

- **Série de Fourier réelle** : symétrique (cosinus) et antisymétrique (sinus)

$$(6.4)$$

- **Série de Fourier réelle** :  $a_{-n} = a_n$  et  $b_{-n} = -b_n$  (6.6)

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left( a_n \cos nx + b_n \sin nx \right) \quad (6.7)$$

$$\text{où } \cos(nx) = \cos(-nx) \text{ et } \sin(nx) = -\sin(-nx) \quad (6.5)$$

- **Coefficients de Fourier réels** : démonstration en exercice

$$(6.28)$$

$$(6.30)$$

- **Discontinuité** : fonction en  $x_0$

$$f(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left( f(x_0 + \varepsilon) + f(x_0 - \varepsilon) \right) \quad (6.8)$$

- **Conditions de Dirichlet** : fonction continue par morceaux

- 1 Nombre fini de discontinuités finies sur l'intervalle  $[-\pi, \pi]$
- 2 Nombre fini de maxima et de minima sur l'intervalle  $[-\pi, \pi]$
- 3 Intégrale de  $|f(x)|$  qui converge sur l'intervalle  $[-\pi, \pi]$

- **Relations d'orthonormalité réelle** :  $m, n \in \mathbb{N}^*$  (exercice)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0 \quad (6.13)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \delta_{mn} \quad (6.18)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \delta_{mn} \quad (6.23)$$

- **Série de Fourier réelle :**

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left( \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right) \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n - i b_n) e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n + i b_n) e^{-inx} \quad (6.31)
 \end{aligned}$$

- **Coefficient de Fourier complexe :**  $a_n = a_{-n}$  et  $b_n = -b_{-n}$

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - i b_n) \quad \text{et} \quad c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + i b_n) \quad \text{et} \quad b_0 = 0 \quad (6.32)$$

- **Série de Fourier complexe :** où  $c_{-n} = c_n^*$  et  $c_0 = \frac{a_0}{2}$  (6.33)

$$(6.34)$$

- **Coefficient de Fourier complexe :** (exercice)

$$(6.38)$$

- Relation d'orthonormalité complexe :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} e^{inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(m-n)x} dx = \delta_{mn} \quad (6.35)$$

- Théorème de Parseval :

$$(6.39)$$

- Démonstration :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(x) f(x) dx \quad (6.40)$$

$$= \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c_m^* e^{-imx} c_n e^{inx} dx = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} c_m^* c_n \delta_{mn}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = |c_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad \square$$

- **Séries de Fourier réelle** : fonction paire :  $f(x) = f(-x)$

$$(6.41)$$

- **Coefficient de Fourier réel** : fonction paire

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad \text{et} \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \, dx \quad (6.42)$$

- **Séries de Fourier réelle** : fonction impaire :  $f(x) = -f(-x)$

$$(6.43)$$

- **Coefficient de Fourier réel** : fonction impaire

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (6.44)$$

- Périodicité :

- ①  $x \in [-\pi, \pi]$

- ②  $x' \in [-L, L]$

- Changement de variable :

$$x = \frac{\pi x'}{L} \quad \text{ainsi} \quad dx = \frac{\pi}{L} dx' \quad (6.45)$$

- Série de Fourier réelle : (6.4)

(6.46)

- Coefficients de Fourier réels : (6.26), (6.28) et (6.30)

(6.47)

- **Série de Fourier complexe :**

$$(6.48)$$

- **Coefficient de Fourier complexe :**

$$(6.49)$$

- **Séries de Fourier réelle : fonction paire :**  $f(x') = f(-x')$

$$f(x') = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x'}{L}\right) \quad (6.50)$$

- **Séries de Fourier réelle : fonction impaire :**  $f(x') = -f(-x')$

$$f(x') = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x'}{L}\right) \quad (6.51)$$

- **Coordonnée verticale** : corde vibrante

$$y(x, t) \quad \text{où} \quad x \in [0, L] \quad \text{où} \quad t \in [0, \infty) \quad (6.52)$$

- **Conditions aux bords** :

$$y(0, t) = y(L, t) = 0 \quad (6.53)$$

- **Coordonnée verticale** : série de Fourier réelle impaire

$$(6.54)$$

- **Onde acoustique** : corde vibrante

$$(6.55)$$

- **Onde acoustique** : (6.54) dans (6.55)

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n^2 \pi^2}{L^2} b_n(t) + \frac{1}{c_s^2} \ddot{b}_n(t) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0 \quad (6.56)$$

- **Oscillateur harmonique** : mode  $n$

$$\ddot{b}_n(t) + \omega_n^2 b_n(t) = 0 \quad (6.57)$$

- **Pulsation** : mode  $n$

$$(6.58)$$

- **Amplitude** : mode  $n$  :  $A_n$  et  $B_n$  déterminés par les conditions initiales

$$b_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) \quad (6.59)$$

- **Coordonnée verticale** : série de Fourier réelle

$$(6.60)$$

- **Coordonnée verticale initiale:** (6.60) en  $t = 0$

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (6.61)$$

- **Relation d'orthonormalité :**  $m, n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \delta_{mn} \quad (6.62)$$

- **Relation d'orthonormalité :** parité

$$\frac{1}{2L} \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \delta_{mn} \quad (6.63)$$

- **Coefficients de Fourier pairs :** intégrant pair (6.61) et (6.63)

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{m=1}^{\infty} A_m \delta_{mn} = \frac{1}{2L} \int_0^L \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \end{aligned} \quad (6.64)$$

- **Vitesse verticale** : dérivée temporelle de la coordonnée verticale (6.60)

$$v_y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \left( B_n \cos(\omega_n t) - A_n \sin(\omega_n t) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (6.65)$$

- **Vitesse verticale initiale**: (6.65) en  $t = 0$

$$v_y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (6.66)$$

- **Relation d'orthonormalité** : parité

$$\frac{1}{2L} \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \delta_{mn} \quad (6.63)$$

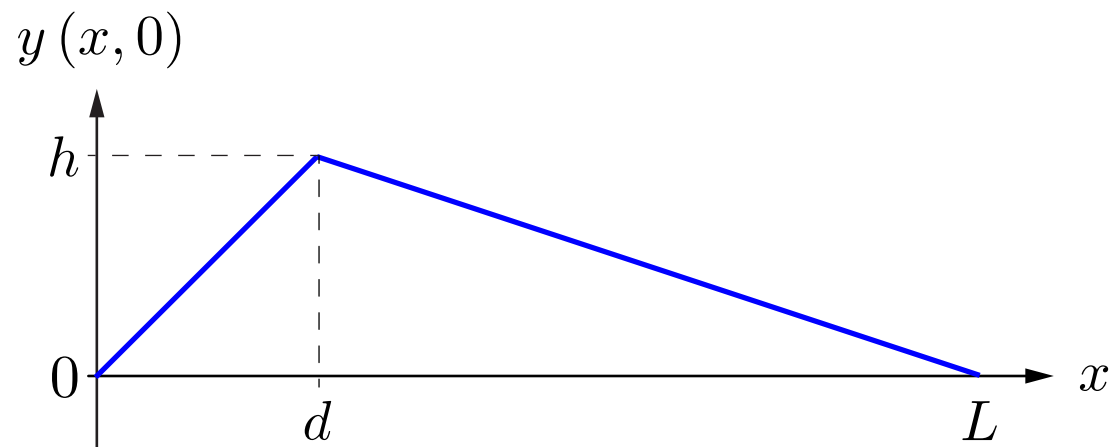
- **Coefficients de Fourier impairs** : intégrant pair et relation (6.63)

$$B_n = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \delta_{mn} = \frac{1}{2L \omega_n} \int_0^L \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m B_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$= \quad (6.67)$$

- **Coordonnée verticale initiale** : corde pincée en  $x = d$  ainsi  $y(d, 0) = h$

$$y(x, 0) = \begin{cases} \frac{x}{d} h & \text{si } 0 \leq x \leq d \\ \frac{L-x}{L-d} h & \text{si } d \leq x \leq L \end{cases} \quad (6.69)$$



- **Vitesse verticale initiale** : nulle : corde au repos

$$v_y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0 \quad \text{ainsi} \quad B_n = 0 \quad (6.70)$$

- **Coordonnée verticale** : série de Fourier réelle paire (6.70) dans (6.60)

$$(6.71)$$

- **Changement de variable :**

$$z = \frac{n\pi x}{L} \quad \text{ainsi} \quad dz = \frac{n\pi}{L} dx \quad (6.73)$$

- **Coefficients de Fourier pairs :** (6.69) dans (6.64)

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{L} \int_0^d \frac{x}{d} h \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \frac{2}{L} \int_d^L \frac{L-x}{L-d} h \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{2hL}{n^2\pi^2 d} \int_0^{\frac{n\pi d}{L}} z \sin z dz + \frac{2hL}{n\pi(L-d)} \int_{\frac{n\pi d}{L}}^{\frac{n\pi L}{L}} \sin z dz \\ &\quad - \frac{2hL}{n^2\pi^2(L-d)} \int_{\frac{n\pi d}{L}}^{\frac{n\pi L}{L}} z \sin z dz \end{aligned} \quad (6.74)$$

- **Intégration par parties :**

$$\begin{aligned} \int_a^b z \sin z dz &= -z \cos z \Big|_a^b + \int_a^b \cos z dz = -z \cos z \Big|_a^b + \sin z \Big|_a^b \\ &= a \cos a - \sin a + \sin b - b \cos b \end{aligned} \quad (6.75)$$

- Coefficients de Fourier pairs : (6.75) dans (6.74)

$$\begin{aligned}
 A_n &= \frac{2 h L}{n^2 \pi^2 d} \left( \sin \left( \frac{n \pi d}{L} \right) - \frac{n \pi d}{L} \cos \left( \frac{n \pi d}{L} \right) \right) \\
 &\quad - \frac{2 h L}{n \pi (L - d)} \left( \cos \left( \frac{n \pi L}{L} \right) - \cos \left( \frac{n \pi d}{L} \right) \right) \\
 &\quad + \frac{2 h L}{n^2 \pi^2 (L - d)} \left( \sin \left( \frac{n \pi d}{L} \right) - \frac{n \pi d}{L} \cos \left( \frac{n \pi d}{L} \right) \right) \\
 &\quad - \frac{2 h L}{n^2 \pi^2 (L - d)} \left( \sin \left( \frac{n \pi L}{L} \right) - \frac{n \pi L}{L} \cos \left( \frac{n \pi L}{L} \right) \right) \\
 &= \frac{2 h L}{n^2 \pi^2 d} \sin \left( \frac{n \pi d}{L} \right) + \frac{2 h L}{n^2 \pi^2 (L - d)} \left( \sin \left( \frac{n \pi d}{L} \right) \right) \\
 &\quad - \frac{2 h}{n \pi} \cos \left( \frac{n \pi d}{L} \right) + \frac{2 h L}{n \pi (L - d)} \cos \left( \frac{n \pi d}{L} \right) \\
 &\quad - \frac{2 h d}{n \pi (L - d)} \cos \left( \frac{n \pi d}{L} \right)
 \end{aligned} \tag{6.77}$$

- **Coefficients de Fourier pairs** : (6.77) remis en forme

(6.78)

- **Coordonnée verticale initiale** : (6.78) dans (6.61)

(6.79)

- **Coordonnée verticale** : évolution temporelle (6.78) dans (6.71)

(6.80)

